第 28 講　軌跡の求め方

28　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点 P から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の接点を A，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ に引いた接線の接点を B とする．PA：PB$=\sqrt{2}$：1 を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2)　曲線 $C：y=x^2-2x$ と直線 $l：y=mx+m$（m は定数）の異なる 2 つの交点を P，Q とする．線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

(3)　2 直線 $mx-y-m=0$，$x+my-m=0$ の共有点 P の軌跡を求めよ．ただし，m は実数定数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　軌跡の求め方

28　xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする．l 上の点Pに対して次の3つの条件を満たす点Qを対応させる．

(Ⅰ)　原点をOとするとき，Qは直線OP上にある．

(Ⅱ)　Qの x 座標は負である．

(Ⅲ)　$|\mathrm{AB}|$ で線分ABの長さを表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす．

Pが l 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

【選択肢】

㋐　円 $x^2+y^2\pm x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋑　円 $x^2+y^2+x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋒　円 $x^2+y^2-x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　軌跡の求め方

28 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上の点 P から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の接点を A，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ に引いた接線の接点を B とする．PA：PB＝$\sqrt{2}$：1 を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2) 曲線 C：$y=x^2-2x$ と直線 l：$y=mx+m$（m は定数）の異なる 2 つの交点を P，Q とする．線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

(3) 2 直線 $mx-y-m=0$，$x+my-m=0$ の共有点 P の軌跡を求めよ．ただし，m は実数定数とする．

【答】 (1) 円 $(x-6)^2+(y-4)^2=33$

(2) 放物線の一部 $y=2(x-1)(x+1)$（$x<-1-\sqrt{3}$，$x>-1+\sqrt{3}$）

(3) 円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ の点 (1，1) を除いた部分

【解答】

(1) O(0，0)，C(3，2) として，P(X，Y) とおく．

∠PAO と ∠PBC はともに直角であるので，三平方の定理より $\mathrm{PA}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OA}^2$，$\mathrm{PB}^2=\mathrm{CP}^2-\mathrm{CB}^2$ となる．

ここで，PA：PB＝$\sqrt{2}$：1 より

$$2\mathrm{PB}^2=\mathrm{PA}^2$$
$$2(\mathrm{CP}^2-\mathrm{CB}^2)=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OA}^2$$
$$2\{(X-3)^2+(Y-2)^2-2^2\}=X^2+Y^2-1^2$$

であるから，点 P の軌跡の方程式は $x^2+y^2-12x-8y+19=0$ となる．

$(x-6)^2+(y-4)^2=33$（>0）と変形できるので，求める軌跡は

円 $(x-6)^2+(y-4)^2=33$

(2) 線分 PQ の中点を M(X，Y) とする．

C と l の式を連立すると

$$x^2-2x=mx+m$$
$$x^2-(m+2)x-m=0$$

これが異なる 2 つの実数解をもつので

$$(m+2)^2-4(-m)>0$$
$$m^2+8m+4>0$$
$$\therefore\quad m<-4-2\sqrt{3},\ m>-4+2\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

異なる 2 つの解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=m+2,\qquad \alpha\beta=-m$$

ここで P，Q は直線 l 上の点より P(α，$m(\alpha+1)$)，Q(β，$m(\beta+1)$)，さらに M(X，Y) は線分 PQ の中点であるから

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+2}{2}\quad\cdots\cdots②$$

$$Y=\frac{m(\alpha+1)+m(\beta+1)}{2}$$

$$=\frac{m(\alpha+\beta)+2m}{2}=\frac{m(m+2)+2m}{2}=\frac{m(m+4)}{2}\quad\cdots\cdots③$$

②より $m=2(X-1)$，これを③に代入して

$$Y=\frac{2(X-1)(2X+2)}{2}=2(X-1)(X+1)$$

また，①へ代入して

$$2(X-1)<-4-2\sqrt{3},\ 2(X-1)>-4+2\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad X<-1-\sqrt{3},\ X>-1+\sqrt{3}$$

よって求める軌跡は

放物線の一部 $y=2(x-1)(x+1)$ $(x<-1-\sqrt{3},\ x>-1+\sqrt{3})$

(3)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，P は 2 直線の交点であるので

$$mX-Y-m=0\quad\cdots\cdots①,\qquad X+mY-m=0\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ．ここで，①より $m(X-1)=Y$ となるが

(Ⅰ)　$X\neq1$ のとき $m=\dfrac{Y}{X-1}$ と変形できるので，これを②へ代入して

$$X+\frac{Y}{X-1}\cdot Y-\frac{Y}{X-1}=0$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\quad(X\neq1)$$

を得る．

(Ⅱ)　$X=1$ のとき①より $Y=0$ となるが，これらと②より $1+m\cdot0-m=0$ すなわち $m=1$ を得る．よって $(X,\ Y)=(1,\ 0)$

以上より求める軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ の点 (1, 1) を除いた部分

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　軌跡の求め方

28 xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする．l 上の点Pに対して次の3つの条件を満たす点Qを対応させる．

(Ⅰ) 原点をOとするとき，Qは直線OP上にある．

(Ⅱ) Qの x 座標は負である．

(Ⅲ) $|\mathrm{AB}|$ で線分ABの長さを表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす．

Pが l 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

【選択肢】

㋐ 円 $x^2+y^2\pm x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋑ 円 $x^2+y^2+x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋒ 円 $x^2+y^2-x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

【答】 ㋑

【解答】

$\mathrm{P}(1,\ t)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおく．

条件(Ⅰ)より，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は直線 $y=tx$ 上にあるので $Y=tX$ ……①

条件(Ⅱ)より，$X<0$ ……②

条件(Ⅲ)より，$|\mathrm{OP}|^2|\mathrm{OQ}|^2=1$　ゆえに　$(1+t^2)(X^2+Y^2)=1$ ……③

②より $X\neq0$ であるから①は $t=\dfrac{Y}{X}$ と変形でき，これを③へ代入すると

$$\left\{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right\}(X^2+Y^2)=1$$

$$(X^2+Y^2)^2=X^2$$

$$X^2+Y^2=-X \qquad (X<0\text{ より})$$

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\frac{1}{4}$$

よって求める軌跡の方程式は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　（ただし，$x\neq0$）

ゆえに求める軌跡は

円 $x^2+y^2+x=0$ の点 (0, 0) を除く部分

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。